ipi
Зборник Института за педагошка истраживања ISSN 0579-6431
Година 44 • Број 1 • Јун 2012 • 92-110 Оригинални научни чланак
УДК 159.953.5.072-057.874 ; 371.3::51 DOI: 10.2298/ZIPI1201092M

ПРЕДНОСТИ ДИСКУСИЈЕ И КОГНИТИВНОГ КОНФЛИКТА КАО МЕТОДЕ РАДА У САВРЕМЕНОЈ НАСТАВИ МАТЕМАТИКЕ

Ирена Мишурац Зорица
Филозофски факултет у Сплиту, Хрватска

*Маја Циндрић**
Одјел за изобразбу учитеља и одгојитеља Свеучилишта у Задру, Хрватска

Апстракт. Савремене теорије учења и поучавања математике наглашавају важност учениковог активног учествовања у наставном процесу у којем откривањем и логичким закључивањем ученици изграђују своје знање. Приликом таквог облика поучавања важно је откривати ученикове мисконцепције и грешке које могу настати приликом закључивања. Неоткривене и погрешно изграђене концепције на које ученицима није указано могу увелико допринети супротном ефекту код конструисања знања. У настави математике много је таквих ситуација које код ученика остављају нејасноће и доводе до погрешних закључака, због којих настава математике, а и сама математичка знања, деци остављају утисак нечег што не могу сви савладати. Дискусија и когнитивни конфликт јесу методе које полазиште налазе у теорији конструктивизма. Циљ нашег истраживања био је да се утврди повећава ли примена метода дискусије и когнитивног конфликта на учење дељења децималних бројева успешност учениковог процедуралног и концептуланог знања о дељењу децималних бројева. У раду су лонгитудинално, кроз једну школску годину, праћене две групе од по 117 ученика петог разреда основне школе. У првој групи, поучаваној према принципима савремене наставе математике, с ученицима се дискутовало, откриване су њихове мисконцепције и грешке, и когнитивним конфликтом смо их доводили до исправних концепата. Друга група ученика поучавана је традиционалним начином рада – учењем процедуре и њеним увежбавањем. Рад презентује дескриптивну анализу поступка поучавања и квантитативну анализу успешности темељену на упоређењу концептуалних и процедуралних

* E-mail: mcindric@unizd.hr

знања код обе групе. Резултати рада показали су да примена савремених метода дискусије и когнитивног конфликта утиче на повећање успешности како процедуралног, тако и концептуалног знања о дељењу децималних бројева код ученика.
Кључне речи: когнитивни конфликт, математичка дискусија, дељење, децимални бројеви.

Историју подучавања математике пратиле су различите теорије учења и подучавања, које су мање-више наилазиле на одјек у наставној пракси или утицале на формирање националних курикулума за математику. Настојање учитеља да поуче децу математичким садржајима, који при вишим нивоима постају све захтевнији и које већина деце не успеју да савладају, одскора постаје феномен вредан темељног истраживања.

Иако је становиште с почетка прошлог века, асоцијационистичка теорија Едварда Торндајка нашла одјек у настави математике, неке њене одлике дубоко су укорењене и у данашњој настави математике. Торндајк је тврдио да је математика скуп специјализованих навика понашања усмерених на мере и релације, и да је учење математике као учење куцања на машини (English, 2002). Такво увежбавање математичких процедуралних задатака усталило се као ефективна метода учења математике. Традиционална настава математике карактеристична је управо по наглашавању и подстицању усвајања процедуралних умећа, посебно умећа рачунања, познавања алгоритама и вештине решавања стандардизованих задатака.

Чин примене математике састоји се од одабирања прикладних вештина из нечије математичке „кутије са алатом" и вршења низа рачунања, односно манипулација симболима, како би се добио исти одговор као онај који се налази међу решењима у уџбенику (Draper & Siebert, 2004). У традиционалној настави математике много пажње посвећује се механичком запамћивању дефиниција и тврдњи, табелама сабирања, одузимања, множења и дељења, и меморисању разних других чињеница (математичких речи, назива, правила, формула, разјашњења, исправног начина говора у поступку решавања одређене врсте проблема и слично). Садржаји учења дефинисани су непроменљивим програмом који се мора реализовати у предвиђеном времену, а уџбеници, приручници и додатни материјал морају потпуно бити усаглашени са програмом.

Насупрот традиционалној настави, на који је велики утицај имала асоцијационистичка теорија, на савремену наставу математике утицале су новије теорије учења и подучавања. Значајан утицај на савремени приступ у настави математике има теорија учења позната као конструктивизам, уз своје фракције радикални конструктивизам и социјални конструктивизам. Конструктивизам истиче важност дечијег активног учествовања у изградњи властитог знања. Дете мора конструисати, модификовати и интегрисати своје знање у интеракцији са физичким светом, дидактичким материјалом и осталом децом. Конструктивистичка перспектива истиче да се концептуално знање не може пренети с једне особе на другу, већ мора бити изграђено у глави сваког детета на основу његовог искуства.

Основна идеја широке савремене математичке и методичке заједнице гласи да је у данашњим условима живљења математика потребна свима, и да је сви људи могу успешно научити и примењивати. Вођени том идејом, морамо проналазити нове, савремене методе рада у настави математике. Конструктивистичка парадигма, иако је теорија у чијем се центру налази процес усвајања, даје и смернице за ефикасну наставу засновану на активном учествовању ученика. Ернст (Ernst, 1996) у свом раду наглашава да учитељ мора бити свестан и осетљив за ученикове постојеће менталне структуре и пре подучавања утврдити ученикове грешке и мисконцепције, и пертурбацијом и когнитивним конфликтом треба да их реши.

Вођени том идејом и свесни грешака које се често могу наћи код многих ученика, истражили смо могућности обликовања методе рада која ће допринети квалитетнијој настави математике. С друге стране, наилазимо на инертност образовних система и васпитно-образовне праксе при усвајању промена, нових метода рада и другачијег приступа васпитно-образовним вредностима. Стога, да би се на одређене методе могло указати као на корисне и сврсисходне, потребно је истражити њихову ефикасност. Циљ овог истраживања јесте да се проуче предности дискусије и когнитивног конфликта као метода рада посматрањем утицаја на трајност и квалитет математичких знања.

Мисконцепције и когнитивни конфликт

Иако су све импликације подједнако значајне за наставу математике, али и природних наука у целини, управо су дечије мисконцепције те које се прећутно укорењују у ученикову менталну структуру и тако стварају препреку квалитетној изградњи учениковог знања. Такве мисконцепције неће испливати на површину у традиционалним облицима подучавања математике, већ само кроз циљану дискусију, усмерену на откривање ученичких концептуалних знања.

Дечије мисконцепције у вези са дељењем децималних бројева. Кроз наставу математике ученици се сусрећу са многим препрекама, које често постају разлог одустајања од учења математике. Иако су прве појаве мисконцепција код деце забележене још код најмлађе популације ученика основне школе (Carpenter *et al*., 1993), већина ученика се с потешкоћама у учењу математике суочава када упознају разломке и децималне бројеве. У том тренутку је потребно проширити идеју о појму броја са природног броја на позитивне рационалне бројеве. Иако тога често нису свесни, ученици су, уз основне и поучаване законитости о бројевима, створили личне, неизречене законитости о бројевима, које су у време и за потребе учења природних бројева биле одговарајуће, док проширивањем скупа бројева те законитости постају компликоване.

Тако, на пример, без посебног усмеравања ученика на дужину записа броја, приликом учења уређења у скупу природних бројева већина ученика перципира као већи број онај који има дужи запис. Прећутно се таква мисконцепција увлачи у менталну структуру ученика. Сама чињеница не изазива потешкоће код усвајања уређења у скупу природних бројева, но упоређивањем децималних бројева та мисконцепција ће довести ученика до закључка да је 0,12 < 0,1125. Ученик с таквим и сличним закључивањем, у традиционалном начину поучавања математике, перципиран је као ђак који није научио процедуру упоређивања два децимална броја. Процедура упоређивања два децимална броја у свим уџбеницима које је тренутно одобрило Министарство знаности, образовања и шпорта Републике Хрватске описује се на следећи начин:

- Упореди целе делове децималних бројева. Већи је онај којем је цео део већи;
- Цели су делови једнаки, па почињемо да упоређујемо децимале, овим редоследом: прве, ако су исте, прелазимо на друге, ако су и оне исте, прелазимо на треће, све док не наиђемо на једну од њих који има већу децималу, па закључујемо да је она већа;
- Ако смо упоредили све децимале и нисмо нашли ниједну према којој се разликују, закључујемо да су та два децимална броја с једнаким целим и једнаким децималним деловима једнака.

Таква упутства не садрже математичку аргументацију која би ученику била јасно оправдање за коришћење процедуре. Ученик није самосталним радом и логичким закључивањем, на основу разумевања и познавања децималног записа броја у оквиру декадног бројевног система, нити коришћењем дидактичког материјала, као што су Динесове коцке, дошао до овавких правила и упутстава, већ му се они наметнути као рецепт за коришћење који ће он упорном употребом и применом на многим задацима увежбати, а можда напокон и разумети. Ипак, условљени успехом из наставног предмета, ученици примењују процедуру без дубљег улажења у разлоге ових корака и концептуално разумевање појма децималног броја у оквиру декадног бројевног система, док, с друге стране, снажан утицај мисконцепције „дуже је веће" („longer is larger" misconception) не дозвољава развој знања и ученикове менталне структуре.

Са́мо познавање процедуре врло брзо одлази у заборав, јер као спознајна чињеница није пронашла место у менталној структури ученика, већ се памти краткотрајно, као изоловано сазнање. Оваква мисконцепција ученику је очигледна и не ствара му нелагодност која би нарушила његову менталну структуру с циљем да је модификује. Управо је „очигледност“ једна од карактеристика мисконцепција (Greaber & Johnson, 1991). Уз „очигледност“, када особа као да нема потребу да доказује чињеницу, карактеристике мисконцепција су „приморанoст“ (особа као да је приморана да је користи, то јест она се увек јавља као прва реакција) и „широка распрострањеност“, што указује да, независно од старости или образовања особе, она утиче на доношење одлука. Описана мисконцепција „дуже је веће“, осим својства очигледности, свакако се одликује и широком распрострањеношћу, јер се њени записи могу наћи у бројној литератури с подручја математичке едукације (Steinele, 2004), а такве су мисконцепције тврдокорне и захтевају истрајан рад на откривању, дијагностиковању и санацији.

Метода којом се ефикасно санирају дечије мисконцепције, а коју су предложили конструктивисти (Ernst, 1996), јесте вођење математичке дискусије и постављање когнитивног конфликта. Дискусија започиње проблемском ситуацијом коју обликује наставник у правцу у којем очекује испољавање неразумевања код ученика. Циљ математичке дискусије чини размена мишљења код ученика, навођење противпримера за нетачне закључке, којима би ученикова мисконцепција дошла у контрадикцију са самом собом. Таква ситуација уноси неравнотежу у ученикову менталну структуру, а, како је циљ постићи еквилибрацију менталне структуре, ученик ће нова сазнања уклопити у донекле измењену менталну структуру.

Темељ нашег истраживања мисконцепције о дељењу децималних бројева описали су многи аутори. Истраживања која укључују дељење децималних бројева започела су осамдесетих година прошлог века, испитујући тешкоће у решавању задатака речима које укључују дељење децималних бројева (Fishbein, 1985; Greer, 1987; 1988; 1992; DeCorte & Verschaffel, 1996; Tirosh & Greaber, 1990). Тадашња истраживања су указала на нејасноће и неразумевање задатака у којима је делилац децимални број и задатака у којима је дељеник мањи од делиоца.

Тај феномен објашњаван је постојањем партитивног и мерног модела дељења. Партитивни модел дељења – где је скуп елемената подељен на задати број дисјунктних подскупова, уз услов да је у сваком једнак број елемената – деци је ближи од мерног модела, у коме је скуп елемената подељен на дисјунктне подскупе са задатим бројем елемената у сваком подскупу. Сквајер и Брајант (Squire & Bryant, 2002a; 2003) показали су да се дечије неформално знање о дељењу заснива на праведном дељењу у свакодневном животу. Дељење које се темељи на праведном дељењу у свакодневном животу деци је блиско и такав модел дељења, партитивни модел, често у оквиру школске математике заузима већи простор од мерног модела, такође важног за квалитетну изградњу концепта дељења и повезивање дељења децималних бројева и дељења природних бројева.

Фишбајн и сарадници (Fishbein *et al*., 1985) истраживали су дечије мисконцепције везане за дељење, иако проблем нису дефинисали као мисконцепције, већ као тврдокорне и утицајне моделе. Ефект тог модела је да он одговара природним и основним особинама човековог сазнања (Fishbein *et al*., 1985). Наиме, и деца, али и одрасли људи настоје да природно интерпретирају чињенице и идеје у појмовима модела који су њима смислени. У вези са дељењем, поменути аутори истичу да су на делу два интуитивна модела која деца користе када проблемска ситуација захтева дељење, а реч је о партитивном моделу дељења и мерном моделу дељења. Последице интуитивних модела, како их називају Фишбајн и сарадници, односно дечијег схватања дељења уопште, а тиче се погрешног разумевања појма дељења децималних бројева и разломака, су следеће:

(1) делилац мора бити мањи од дељеника;
(2) делилац мора бити цео број;
(3) количник мора бити мањи од дељеника.

Претпоставка је да су наведене мисконцепције широко распрострањене и да их поседује већина ученика у одабраном узорку. Приступ математичким концептима методом дискусије и когнитивног конфликта утиче на разумевање математичких концепата од оперативног до структуралног нивоа (Okazaki & Koyoma, 2005), при чему оперативни ниво концепта дељења подразумева упознавање деце са ситуацијама дељења које се надовезују на постојеће знање о дељењу, а уводе дисеквилибрацију са ситуацијама које садрже уобичајене мисконцепције. Успостављање еквилибрације и провера проширених сазнања кроз алгоритам дељења води према структуралном нивоу, који је, према Сфарду (Sfard, 1991), статичан, насупрот оперативном, који је динамичан.

Дисеквилибрација је постављена циљано у разредима у којима је била експериментална група испитаника и дискусијом је доведена у стање еквилибрације. Ваља притом нагласити да је реч о дискусији са групом ученика у разреду, која не мора баш код сваког ученика подстаћи дисеквилибрацију и еквилибрацију истом ситуацијом, па чак ни преурађени одговори неких ђака неће код других ученика подстаћи ток промене оперативног нивоа. Интервенција у настави се стога не усмерава на наставну јединицу, већ су целокупан наставни процес и парадигма активног учења устаљени код наставника који су изабрани за наставнике у експерименталним групама.

Методологија

Циљ истраживања. Као што је назначено у уводном делу, циљ нашег истраживања јесте да испитамо предности дискусије и когнитивног конфликта као методе рада, посматрањем утицаја на трајност и квалитет математичких знања. Будући да је један од циљева наставе трајно задржавање васпитно-образовних добара, овим истраживањем на конкретном примеру пратићемо ниво процедуралног и концептуалног знања након одређеног времена које је протекло од подучавања.

Узорак истраживања. За узорак истраживања узета је група од 234 ученика петог разреда основне школе. Узорак је подељен у две групе од по 117 ученика, при чему је једна експериментална, а друга контролна група. Ученици у обе групе ђаци су основних школа на подручју града Задра, односно ученици из урбане средине. Просечан узраст ученика у експерименталној групи износи 10 година и 6 месеци, а у контролној групи 10 година и 8 месеци, што није значајно за разлике у резултатима истраживања. Групе су такође упоредиве према полној структури – у експерименталној групи је 61% дечака и 39% девојчица, док је у контролној групи 58% дечака и 42% девојчица. У обе групе више је дечака од девојчица, тако да могуће разлике због успешности нису узроковане разликама у полној структури експерименталне и контролне групе.

Поступак истраживања и интервенција у настави. За разумевање и анализу истраживања важно је нагласити улогу наставника математике у одељењима у којима се налазе експериментална и контролна група. У припреми истраживања замолили смо наставнике математике, окупљене на скупу актива наставника математике, да учествују у истраживању савремених метода рада у настави математике. Позиву су се одазвале три наставнице математике, које имају 10 и 18 година, као и двадесет једну годину радног стажа у настави математике. Те три наставнице одабране су за наставнице експерименталне групе. Накнадно су још три наставнице замољене за спровођење тестирања њихових ученика током три периода. Оне нису биле упознате са методом дискусије и когнитивног конфликта.

Наставнице у контролној групи изабране су тако да према годинама радног стажа одговарају наставницама у експерименталној групи. Њихове године стажа у настави математике броје 5 и 20 година, као и двадесет две године. Ипак су замољене да укратко опишу начин увођења дељења децималних бројева. Њихов рад се базира на презентовању алгоритма дељења и њиховог увежбавања, што су пропратиле коментаром да је тај поступак за децу тежак и неразумљив, чиме су се потврдиле као адекватне за наставнике у контролној групи, за коју очекујемо да је поучавана традиционалном методом.

Наставнице есперименталне групе учествовале су у дводневној радионици на тему савремене наставе математике, где је, између осталог, развијен поступак интервенције у настави. Како је циљ интервенције у настави био да се подстакне дискусија и побуђивање когнитивног конфликта код ученика како би се откриле мисконцепције и да би се ученик суочио са њима, доносимо транскрипт дискусије вођене у једном од разреда експерименталне групе.

Учитељ: До сада сте научили да сабирате, одузимате и множите децималне бројеве, а сада преостаје да се науче делити децимални бројеви. Шта знате од раније о дељењу бројева?
Ученик: Делити писано.
Ученик: Или напамет. Нешто можеш напамет.
Ученик: Напамет можеш таблицу множења и неке лакше задатке, као 33 : 3 =1 1.
Учитељ: Дакле, сви знате напамет колико је 12 : 3!
Ученик: 4.
Учитељ: Можете ли навести неко објашњење зашто је 12 : 3=4?
Ученик: Ако имамо 12 евра и поделимо их на троје деце, свако ће добити 4.
Учитељ: Колико је 1 : 2?
Ученик: Пола.
Учитељ: Зашто?
Ученик: Ако један колач поделимо на двоје деце, свако ће добити пола.
Учитељ: То је тачно. Како ћемо записати то дељење?
Ученик: 1 : 2 = 0,5
Учитељ: Можемо ли на сличан начин и даље делити? Колико је 12 : 0,5?
Ученик: 6!
Ученик: 12 евра на пола јесте 6.
Учитељ:Што значи поделити на пола? Можеш ли бити прецизнија?
Ученик: Па, имаш 12 евра и пола даш Петру и пола Анђели.
Учитељ: Употреби исту ситуацију за 12 : 2.
Ученик: Мама има 12 евра и жели поделити Петру и Анђели тако да свако добије једнако много. Колико ће добити свако од њих?
Учитељ: Да ли је реч о истим ситуацијама? Да ли је 12 : 2 исто што и 12 : 0,5?
Ученици: Није исто.
Учитељ: Вратимо се на 12 : 3. Можемо ли на још неки начин описати зашто је 12 : 3 = 4?
Ученик: Девојчица има 12 евра, а гумица кошта 3 евра. Колико гумица она може купити?
Ученик: Може купити 4 гумице.
Учитељ: Можемо ли применити исту ситуацију на дељење 12 : 0,5?
Ученик: Девојчица има 12 евра, а гумица кошта 0,5 евра. Колико гумица може да купи?
Ученик: 24.
Учитељ: Можемо ли то записати? Како?
Ученик: 12 : 0,5 = 24
Учитељ: Слажете ли се с тиме? Не делујете сигурно. Шта вас мучи?
Ученик: Како можеш добити 24, а делиш 12?
Ученик: Може бити! Ако имаш 12 јабука и поделиш их по 3, добијеш 4. Ако имаш 12 јабука и поделиш их на половине, добијеш 24 половине.

Слична дискусија је вођена даље током обраде и сваки пут када применом алгоритма резултат дељења није био тачан. У експерименталним разредима наставници су реализовали наставу користећи процену резултата пре саме примене алгоритма дељења. После интервенције у настави, лонгитудинално је праћен успех ученика експерименталне и контролне групе током једне године у три временска периода – недуго након интервенције у настави, 6 месеци након интервенције и 12 месеци након интервенције.

Хипотезе истраживања. Хипотезе истраживања су:

- Ученици подучавани дељењу децималних бројева методом дискусије и когнитивног конфликта успешнији су у процедуралном и концептуалном познавању децималних бројева у односу на ученике који су дељењу децималних бројева подучавани презентовањем традиционалног алгоритма дељења и његовим увежбавањем.
- Ученици подучавани дељењу децималних бројева методом дискусије и когнитивног конфликта успешнији су након подучавања, шест месеци након подучавања и дванаест месеци након подучавања у односу на ученике који су дељењу децималних бројева подучавани презентовањем традиционалног алгоритма дељења и његовим увежбавањем.

Прикупљање података и анализа. Недуго након обраде (10-14 дана) дељења децималних бројева у експерименталној и контролној групи осмишљени су задаци за проверу знања алгоритма дељења децималних бројева и задаци провере разумевања појма дељења два децимална броја. Провера усвојености алгоритма дељења спровођена је задавањем задатака П1-П5, датих у Табели 1, док је за проверу разумевања појма дељења коришћена Силверова метода „posing problems“ [постављање проблема]. Уз задати бројевни израз дељења (К1-К4) ученицима је дато упутство да осмисле текст задатка чије је решење задати израз (Табела 2).

Табела 1: Задаци за проверу усвојености алгоритма дељења

Број задатка	*Задатак*	*Дискусија*
П1	4 : 0,5	Дељеник већи од делиоца. Делилац мањи од 1.
П2	12,33 : 3	Дељеник већи од делиоца. Делилац природан број.
П3	6,25 : 2,5	Дељеник већи од делиоца. Делилац децимални број већи од 1.
П4	3 : 4	Дељеник мањи од делиоца. Делилац природан број.
П5	0,25 : 5	Дељеник мањи од делиоца. Оба децимални бројеви.

Табела 2: *Бројевни изрази за проверу разумевања појма дељења децималних бројева*

Број задатка	*Задатак*	*Дискусија*
К1	4 : 0,5	Дељеник природан број, делилац децималан број. Дељеник већи од делиоца.
К2	3,21 : 0,75	Дељеник већи од делиоца. Делилац цео број.
К3	0,75 : 0,25	Дељеник већи од делиоца. Делилац децимални број већи од 1.
К4	4,1 : 4	Дељеник мањи од делиоца. Делилац цео број.

Циљ анализе је да се утврде предности методе дискусије и когнитивног конфликта у настави математике с нагласком на погрешним уверењима која ученици обично имају (Greaber & Tirosh, 1989; Greaber, 1990; Greaber, 1993) у вези са усвајањем алгоритама дељења децималних бројева, као и у вези са разумевањем појма дељења децималних бројева. Притом ће бити размотрена разлика у успешности експерименталне и контролне групе и значајност постигнуте разлике. Усвајање алгоритма дељења без разумевања појма дељења не доводи до изграђивања квалитетних математичких концепата, који ће бити примењиви изван наставе математике. Познавање и примена алгоритма дељења, као и већине алгоритама и поступака чије усвајање и увежбавање обележава традиционалну наставу математике, у тренутку подучавања не представља значајан проблем. Па ипак, трајност усвојених знања у настави математике представља императив.

Повезивање математичких садржаја, разумевање основних математичких концепата, препознавање и примена у животним ситуацијама више је од пуког остваривања образовних задатака наставе математике – то је део математичке писмености који се односи на способност појединца да распозна и разуме улогу коју математика има у свету, да доноси солидно утемељене одлуке и да примењује математику на начине који одговарају потребама живота тог појединца као конструктивног, заинтересованог и промишљеног грађанина (Glasnović Gracin, 2009). Стога, утврђивање знања и примене алгоритма дељења не би требало да се сведе само на испитивања на крају обрађене целине. Потребно је да ово знање буде усвојено на сличан начин на који очекујемо да је научен алгоритам дељења природних бројева. Отуда је трајност знања испитивана лонгитудинално током једне школске године код обе групе, експерименталне и контролне задацима П1-П5.

РЕЗУЛТАТИ И АНАЛИЗА

Лонгитудинално истраживање примене алгоритма дељења децималних бројева код дванаестогодишњака

Усвајање алгоритма дељења децималних бројева захтева од ученика, осим разумевања, и увежбавање. Дискусија о дељењу децималних бројева, презентована у делу о интервенцији, не своди се само на дискусију у уводном делу наставног часа, већ, као што је наглашено раније, прати и ученичко увежбавање писаног алгоритма дељења. Притом, нагласак је на претпоставци о резултату који зависи од дељеника и делиоца и коментару о самом дељењу у ситуационом контексту. Циљ наставе математике није само да ученик разуме, нити само да познаје процедуру – бити вешт у математици подразумева способност флексибилног коришћења знања примењујући научено у прикладним ситуацијама. Спој познавања процедура и разумевања чини оно што желимо да ученици стекну учећи математику у школи.

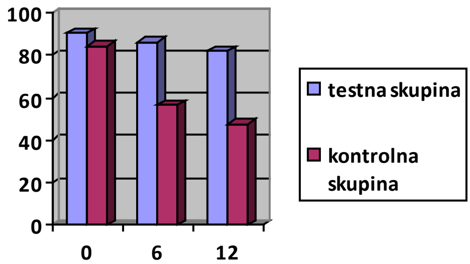
Ученици који меморишу чињенице и процедуре без разумевања често нису сигурни када и како да употребе оно што знају и њихово знање је врло крхко. С једне стране, алгоритми који се у математици претерано увежбавају, без концептуалног разумевања, често се брзо заборављају или се нетачно памте. С друге стране, разумевање концепата без флуентности у извођењу рачуна може представљати препреку у решавању проблемских задатака. Циљ је, дакле, постизање флуентности у рачунању, али и развој разумевања бројева, рачунских радњи и алгоритама. Овим истраживањем показаће се да ли је метода дискусије и когнитивног конфликта корисна у постизању тог циља.

Лонгитудинално праћење успешности процедуралног знања указује на значајну предност експерименталне групе. Тестирање је спроведено три пута, недуго након обраде целине о децималним бројевима, после 6 месеци и после 12 месеци од првог тестирања. Укупна успешност обе групе приказана је у Табели 3 и на Слици 1. Из приказаних података видљив је укупан резултат обе групе. Приликом сваког тестирања експериментална група показала је бољи резултат, али на основу укупног прегледа разлика у резултатима није статистички значајна, јер је, према t-тесту, p=0,105510.

Табела 3: *Успешност (%) у процедуралним задацима*

	0	6	12
тест-група	90,4	86,4	82,1
контролна група	84,2	56,5	47,4

Слика 1: *Дијаграм зависности успешности процедуралног знања од времена протеклог од усвајања код тестовне и контролне групе*



Расподела према задацима код експерименталне и контролне групе указује на бољи успех у решавању задатака П2 и П4 код обе групе, где је делилац природан број, а најмањи успех, у обе групе, код задатка П5, где је дељеник мањи од делиоца.

Табела 4: *Успешност (%) у процедуралним задацима*

	4 : 0,5	12,33 : 3	6,25 : 2,5	3 : 4	0,25 : 5
Тест-група	89,7%	98,3%	88,7%	93,2%	82%
Контролна група	84,6%	91,5%	84,6%	86,3%	74%

Анализа појединих задатака показује почетне претпоставке: ако је делилац децимални број и ако је дељеник мањи од делиоца, то код ученика стварају потешкоће. Ипак, укупна успешност процедуралног знања кроз дуги период од 12 месеци указује на предност експерименталне групе, која је подучавана, између осталог, методом дискусије и когнитивним конфликтом. Овиме је доказан део хипотезе који се односи на процедурално знање ученика о дељењу децималних бројева.

Разумевање појма дељења децималних бројева. Бројевни изрази К1 до К4 постављени су на основу резултата описаних истраживања тако да је делилац децимални број (К1-К3), осим у К4, где је делилац природан број. Задаци изражени речима који су описивали адекватну и логичну ситуацију процењени су као исправни. Табела 5 приказује резултате за експерименталну и контролну групу.

Табела 5: *Успешност (%) постављања задатака речима на основу задатог бројевног израза*

	4 : 0,5	3,21 : 0,75	0,75 : 0,25	4,1 : 4
Тест-група	68,4	46,3	58,2	73,4
Контролна група	45,6	13,2	18,6	32,8

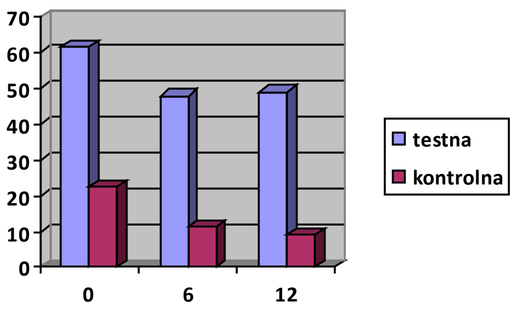
Експериментална група је на сваком примеру успешнија од контролне групе. Примери тачних задатака код експерименталне групе своде се на сличан модел, при чему ученици који формулишу тачне задатке речима идентификују делиоце 0,5; 0,75 и 0,25 као половину, три четвртине и четвртину.

Лонгитудинално праћење процедуралног знања поново указује на предност експерименталне групе у односу на контролну групу, што је могуће уочити из података приказаних у Табели 6 и на дијаграму приказаном на Слици 2. Међутим, у односу на разлике у процедуралном знању, код концептуалног знања разлика је статистички значајна, према *t*-тесту (p=0,003117).

Табела 6: *Успешност (%) у концептуалним задацима*

	0	6	12
Тест-група	61,6	47,8	49,1
Контролна група	22,5	11,2	9,1

Слика 2: *Дијаграм зависности успешности концептуалног знања од времена протеклог од усвајања код тестовне и контролне групе*



Овим је доказан део хипотезе који се односи на концептуално знање ученика о дељењу децималних бројева. Након приказаних резултата можемо закључити да је имплементација дискусије и когнитивног конфликта као методе рада допринела повећаној успешности ученика у процедуралном и концептуалном знању о дељењу децималних бројева. Примена методе указује и на трајност знања дуже од једне године. Осим потврде да су ученици у експерименталној групи показали боље резултате и у процедуралном знању праћеном лонгитудинално и у разумевању појма дељења децималних бројева, овај рад је дао занимљив увид у дечије потешкоће у вези са дељењем децималних бројева, мисконцепцијама о дељењу децималних бројева и утицају знања о дељењу природних бројева на дељење децималних бројева. Утицај дељења природних бројева на грешке код дељења децималних бројева можемо класификовати на следећи начин:

- недовољно наглашавање дељења као праведног дељења;
- постојање остатка при дељењу децималних бројева;
- учестала употреба партитивног модела дељења за описивање дељења децималних бројева.

Недовољно наглашавање праведног дељења наводи ученике да дељење замењују одузимањем, што се испољава у формулацији питања задатка, где ученици често користе питање: „Колико му/јој је остало?" Узрок тога може бити лингвистичке природе, јер реч „поделити" у свакодневном животу не значи нужно праведно дељење, што је могуће видети из задатака облика: „Бака је имала 4 кг јабука, 0,5 кг је поделила комшиници. Колико јој је јабука остало?" Разлог да се постави питање „Колико му/јој је остало?" може навести и на постојање остатка при дељењу децималних бројева. Тако је могуће наћи задатке облика: „Ана има 4,1 дкг бомбона и жели их поделити својим четирима пријатељицама. Колико ће бомбона остати Ани?" Из даље разраде задатка ученик тврди да је 4,1 : 4 = 1 и остатак 0,1 па је Ани остао 0,1 дкг бомбона. С друге стране, утицај партитивног модела могуће је уочити двојако. Један облик утицаја партитивног модела налазимо код ученика који према моделу задатака за дељење природних бројева постављају и задатке за дељење децималних бројева без увида у разумевање самог текста, па је могуће наћи задатак: „Деда има 3,21 кекс и 0,75 унучади. Ако подели кексове унучади, колико ће сваки унук добити кексова?" Такав приступ указује и на често истраживану чињеницу да ученици решавају задатке речима уочавањем бројева у задатку и кључне речи која упућује на рачунску радњу. Други облик утицаја партитивног модела запажамо код ученика који знају резултат дељења 0,75 : 0,25=3, па мењају положај делиоца и количника у задатку да би могли применити партитивни модел.

Иако су у интервентном делу истраживања ученици припремљени на уобичајене и често спомињане мисконцепције, резултати истраживања су указали на дубља неразумевања и мисконцепције које нису узете у обзир у почетном делу истраживања и отварају нова питања и подстичу нове анализе у разлучивању и детекцији појединих мисконцепција које ваља изоловати, открити њихов узрок и утицај на усвајање дељења децималних бројева.

Закључак

На основу приказаних резултата и анализе, уз почетне поставке, можемо закључити да подучавање ученика применом методе дискусије и когнитивног конфликта повећава успешност ученика у процедуралном и концептуалном знању дељења децималних бројева у односу на ученике који су дељењу децималних бројева подучавани презентовањем алгоритма дељења и његовим увежбавањем. Таква успешност се односи и на дужи временски период у којем је успешност праћена. Стога можемо закључити да је применом дискусије и когнитивног конфликта као методе рада у настави заиста повећана ефикасност у постизању главног циља наставе – стицање трајног знања. Иако је истраживање спроведено на једном примеру математичког градива, нема разлога за сумњу да се слични резултати не би поновили и на другим садржајима, јер дељење децималних бројева није математички концепт који ученици савладавају без тешкоћа.

Евентуални утицај на резултате може имати личност наставника у експерименталној групи у односу на личност наставника у контролној групи. Сама жеља наставника да учествују у истраживању нових метода указује на повећано интересовање и мотивацију за успехом у подучавању, што није занемарљив утицај. Свесност о важности развијања ученичких компетенција кроз наставу, а не само усвајања садржаја, може код наставника подстаћи ентузијазам и утицати на реултате истраживања. Ученикова знања и вештине, као темељ будућег успешног деловања у друштву и пословању, стављене су под лупу.

Посебно вештине стечене у оквиру наставе математике, односно математичка писменост постаје темељ нових како општесветских, тако и европских курикулума. Долази до изражаја квалитет математичких знања, нагласак се ставља на различите аспекте и врсте знања и компетенције које ученик стиче кроз наставу математике, за разлику од некадашњих начела, која су предност у учењу математике давала механичком увежбавању. Иако савремене теорије учења и подучавања пропагирају мултидисциплинарни приступ садржајима и методама које активно укључују ученике у истраживање и откривање законитости и процедура, у наставном процесу је утицај традиционалног облика поучавања математике још доминантан. Услови рада и фронтални облик наставе често повлаче за собом традиционалне методе рада, описивање и увежбавање процедура, као и занемаривање различитости дечијих перцепција и размишљања.

Континуирано откривање дечијих мисконцепција и њихово разрешавање средишњи је задатак наставника у савременој настави математике. Фокус наставника мора бити дете, а не садржај поучавања. Примена овакве методе доноси двојаку корист. Дискусија, као наставна метода, омогућава квалитетну динамику наставног часа и утиче на пажњу ученика. Дете се осећа прихваћеним у заједници у којој износи своја мишљења и конфронтира их вербално с осталим учесницима дискусије.

Кроз дискусију дете упознаје своје вршњаке, али и себе, гради своје знање, као и однос према другој деци, наставнику и математици. Сазнање да може управљати тòком својих мисли, логички закључивати, погрешити и из својих грешака научити нешто ново – детету даје перспективу за истрајност и суочавање са животним задацима. Развој таквих вештина и компетенција у оквиру наставе математике, уз усвајање кључних математичких појмова, којима се гради концептуално знање, имају једнаку тежину као и са́мо усвајање математичких концепата.

С друге стране, развој и изградња математичких концепата представља континуиран, динамичан и сложен процес. Математички концепт не постоји као изолован ентитет, већ је део испреплетене мреже различитих концепата и њихових аспеката. Сваки аспект сваког концепта мора бити повезан са аспектима концепта који му је сродан. Повезаност између појмова доприноси формирању мреже појмова код деце. Ако деца, као што је случај у овом истраживању, не повежу знања о дељењу децималних бројева са дељењем природних бројева, као и дељење децималних бројева са концептом децималног броја и свим његовим аспектима, онда неће бити у стању да формирају квалитетну мрежу појмова. На тај начин, само познавање алгоритма дељења не доприноси развоју њихове математичке писмености.

Коришћена литература

Carpenter, T.P., Ansell, E., Franke, M.L., Fennema, E. & L. Weisbeck (1993): Models of problem solving: a study of kindergarten children's problem solving processes, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 24, No. 5, 428-441.

DeCorte, E. & L. Verschoffel (1996): Teaching realistic mathematical modeling in the elementare school: a teaching experiment with fifth graders, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 28, No. 5, 577-601.

Draper, R.J. & D. Siebert (2004): Different goals, similar practice: making sense of the mathematics and literacy instruction in standard-based mathematics classroom, *American Educational Research Journal*, Vol. 41, No. 4, 927-962.

English, L.D. (2002)*: Handbook of international research in mathematics education*. New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Ernst, P. (1996): Varieties of constructivism: a framework for comparison; in L.P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G.A. Goldin & B. Greer (eds.): *Theories of mathematical learning* (335-350). New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Fishbein, R., M. Deri, M. Nello & M. Marino (1985): The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 16, No. 1, 3-17.

Glasnović Gracin, D. (2009): Mathematical requirements in PISA assessment; in *Proceedings of the Second International Colloquium* "*Mathematics and Children*", Osijek.

Greaber, A.O. (1990): Insight four and fifth graders bring to multiplication and division with decimals, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 21, No. 6, 565-588.

Greaber A.O. (1993): Research into practice: misconceptions about multiplication and division, *Arithmetics Teacher*, Vol. 40, No. 7, 408-411.

Greaber, A.O. & Johnson (1991): *Insight into secondary school' studentsunderstanding of mathematics*. College Park, University of Maryland.

Greaber, A.O. & M.D. Tirosh (1989): Preservice teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division, *Journal of Research in Mathematical Education*, Vol. 20, No. 1, 95-102.

Greer, B. (1987): Nonconservation of multiplication and division involving decimals, *Journal of Research in Mathematics Education*, Vol. 18, No. 1, 37-45.

Greer, B. (1988): Nonconservation of multiplication and division: analysis of a symptom, *Journal of Mathematical Behavior*, Vol. 7, No. 3, 281-298.

Greer, B. (1992): Multiplication and division as model of situation; in D. Grouws (ed.): *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (276-295). New York: Macmillan Publishing Company.

Okazaki, M. & M. Koyama (2005): Characteristics of 5th graders' logical development through learning division with decimals, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 60, No. 2, 217-251.

Sfard, A. (1991): On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects on different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 22, No. 1, 1-36.

Skemp, R.R. (1976): Relational understanding and instrumental understanding, *Mathematics Teaching*, Vol. 77, 20-26.

Squire, S. & P. Bryant (2002a): From sharing to dividing: young children's understanding of division, *Developmental Science*, Vol. 5, No. 4, 452-466.

Squire, S. & P. Bryant (2002b): The influence of sharing on children's initial concept of division, *Journal of Experimental Child Psychology*, Vol. 81, No. 1, 1-43.

Squire, S. & P. Bryant (2003): Children's models of division, *Cognitive Development*, Vol. 18, No. 3, 355-376.

Steinele, V. (2004): Detection and remediation of decimal misconceptions, Retrieved December 20, 2011 from the World Web Wide http:\\\www.mav.vic.edu.au/files/conferences/Steinele-formatted.pdf

Tirosch, D. & A.O. Greaber (1990): Evoking cognitive conflict to explore preservice teachers thinging about divison, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 21, No. 2, 98-108.

Verschafell, L. & E. DeCorte (1997): Word problems: a vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school; in T. Nunes & P. Bryant, P. (eds.): *Learning and teaching mathematics: an international perspectives*. Psychology Press.

Vregnaud, G. (1996): The theory of conceptual fields, in L. Steffe, P. Nesher, J. Cobb, J., G. Goldin & B. Greer (eds.): *Theories of mathematical learning*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Примљено 09.03.2012; прихваћено за штампу 29.05.2012.

Irena Mišurac Zorica and Maja Cindrić

ADVANTAGES OF DISCUSSION AND COGNITIVE CONFLICT AS AN INSTRUCTIONAL METHOD IN CONTEMPORARY TEACHING OF MATHEMATICS

Abstract

Contemporary theories of teaching and learning mathematics emphasise the importance of learner's active participation in the teaching process, in which discovery and logical reasoning lead to the construction of student's knowledge. In this form of teaching, it is important to detect students' misunderstandings and errors that can occur during learning. Uncovered tacit and false conceptions of students' knowledge can greatly contribute to the opposite effect in the construction of knowledge. In teaching mathematics, there are many situations which leave students with ambiguities and misunderstandings, and create an impression in children that teaching of mathematics and mathematical knowledge itself is something that is not possible. Discussion and cognitive conflict are methods which have their starting point in the theory of constructivism. The aim of our study has been to determine whether application of the method of discussion and cognitive conflict in learning to divide decimal numbers leads to the enhancement of student's procedural knowledge and conceptual knowledge about the division of decimal numbers. Longitudinally, we monitored two groups of 117 pupils of the fifth grade. In the first group, which was taught according to the guidelines of contemporary mathematics education, students engaged in discussion, discovering their misunderstandings and errors, and the cognitive conflict resulted in correct concepts. The second group of students were taught traditionally, learning the procedure and then practicing it. The paper presents a descriptive analysis of the process of teaching and quantitative analysis of the performance based on the comparison of conceptual and procedural knowledge of both groups. Results of our work show that the application of contemporary methods of discussion and cognitive conflict affects the increase of procedural and conceptual knowledge of the division of decimal numbers.

Key words: cognitive conflict, mathematical discussion, division, decimal numbers.

Ирена Мишурац Зорица и Майя Циндрич

ПРЕИМУЩЕСТВА ДИСКУССИИ И КОГНИТИВНОГО КОНФЛИКТА КАК МЕТОДА РАБОТЫ В СОВРЕМЕННОМ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ

Резюме

Современные теории усваивания и обучения математике подчеркивают важность активного участия учащихся в учебном процессе, в котором путем открытий и логических умозаключений учащиеся приобретают свои знания. При применении таких форм обучения необходимо выявить мисконцепции каждого ученика в отдельности, а также ошибки, которые могут возникать в процессе умозаключений. Неоткрытые и ошибочно выработанные концепции, на которые учащимся не указали, могут в значительной мере содействовать противоположному эффекту в конструировании знаний. В обучении математике встречается немало таких ситуаций, которые в сознании учащихся оставляют недочеты и приводят их к ошибочным умозаключениям, вследствие чего обучение математике, да и сами математические знания, детьми воспринимаются как непостижимые. Дискуссия и когнитивный конфликт являются методами, опирающимися на теорию конструктивизма. Цель нашего исследования – выявить, повышает ли применение метода дискуссии и когнитивного конфликта на обучение разделению десятичных дробей успешность процедурального и концептуального знания учещихся о разделении десятичных дробей. В работе лонгитудинально, в течение одного учебного года, наблюдались две группы из 117 учащихся пятых классов восьмилетней школы в каждой из них. В первой группе, в которой обучение велось соответственно принципам современного обучения математике, с учащимися велись беседы, выявлялись их мисконцепции и ошибки, и на основании когнитивного конфликта их приводили к правильным концептам. Вторая группа учащихся обучалась традиционным образом – они выучивали процедуру и упражнялись в ее применении. Работа презентирует дескриптивный анализ поступков обучения и качественный анализ успешности, базированный на сопоставлении концептуальных и процедуральных знаний в обеих группах. Результаты исследования показали, что применение современных методов дискуссии и когнитивного конфликта влияет на повышение успешности как процедурального, так и концептуального знания учащихся о разделении десятичных дробей.

Ключевые слова: когнитивный конфликт, математическая дисуссия, десятичные дроби.