



Зборник Института за педагошка истраживања
Година 56 • Број 2 • Децембар 2024 • 259–279
УДК 37.091.275::51
37.091.26-057.874(497.11)"2015/2024"

ISSN 0579-6431
ISSN 1820-9270 (Online)
<https://doi.org/10.2298/ZIPI2402259V>
Оригинални научни рад

АНАЛИЗА УСПЕШНОСТИ РЕШАВАЊА ГЕОМЕТРИЈСКИХ ЗАДАТАКА НА ОКРУЖНИМ ТАКМИЧЕЊИМА УЧЕНИКА ЧЕТВРТОГ РАЗРЕДА ОСНОВНЕ ШКОЛЕ*

Ненад Вуловић** ➤ ORCID 0000-0002-6606-2357

Универзитет у Крагујевцу – Факултет педагошких наука, Јагодина, Србија

Сања Маричић ➤ ORCID 0000-0002-0464-3527

Универзитет у Крагујевцу – Педагошки факултет, Ужице, Србија

Бранислав М. Ранђеловић ➤ ORCID 0000-0002-0643-0955

Универзитет у Приштини, К. Митровици – Учитељски факултет у Лепосавићу, Србија

А П С Т Р А К Т

Бројна истраживања и међународна тестирања показују да ученици на садржајима из геометрије показују најслабије резултате у односу на остале области математике у нижим разредима основне школе. У овом раду испитујемо каква постигнућа из области геометрије постижу ученици који су кроз селекцију такмичења дошли до окружног нивоа. Стога је фокус истраживања усмерен на анализу постигнућа ученика четвртог разреда основних школа у Србији, приликом решавања геометријских задатака на окружним такмичењима из математике, у периоду од 2015. до 2024. године. Истраживање је засновано на анализи садржаја геометријских задатака и анализи успеха 18.491 ученика који су у периоду од десет година учествовали на такмичењима. Настојали смо да испитамо на којим геометријским садржајима ученици постижу најбоље резултате и да ли се постигнућа ученика на такмичењу у области геометрије разликују у односу на пол и развијеност средине из које долазе. Добијени резултати показују да ученици најбоље резултате постижу на задацима у чијем решавању треба да примене јасне процедуре у процесу решавања, али да су мање успешни када треба да испоје концептуална знања. Поред тога, резултати показују да између дечака и девојчица нема статистички

* Напомена. Ово истраживање подржало је Министарство за науку, иновације и технолошки развој Републике Србије кроз грантове: 451-03-65/2024-03/200102, 451-03-65/2024-03/200140 и 451-03-65/2024-03/200251.

** Мејл: vljenad@gmail.com

значајних разлика у постигнућима, као и да ученици из развијенијих региона постижу најбоље резултате.

Кључне речи:

математичка такмичења, четврти разред основне школе, пол, развијеност општина, геометријски задаци

■ УВОД

Такмичења из математике ученика основних школа у Републици Србији организују се од шездесетих година прошлога века. Најпре су организована такмичења нижег нивоа, а прво државно такмичење организовано је 1967. године (Мићић и сар., 2008). Ова такмичења су најмасовнија међу ученицима основних школа, а процена је да на годишњем нивоу такмичењу приступи између шездесет и седамдесет хиљада ученика (Vulović et al., 2023). Министарство просвете је поверило Друштву математичара Србије организацију, припрему и реализацију математичких такмичења, па су ова такмичења релевантна, призната од стране свих актера, и постала су незаобилазни сегмент образовног процеса и наставе математике у Србији.

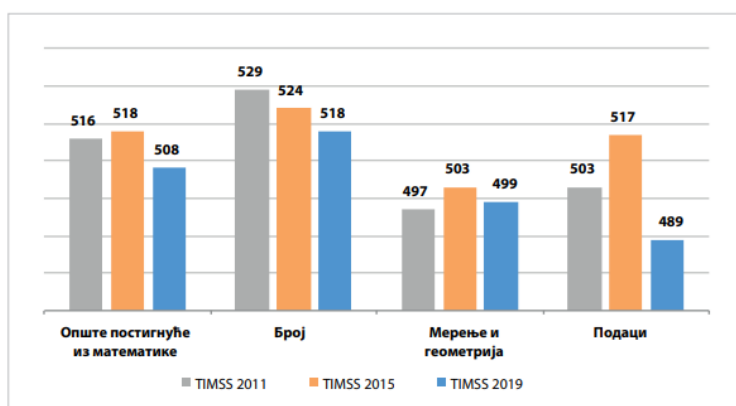
Почетни ниво такмичења из математике представља школски и општински ниво. Због начина селекције ученика, још увек не можемо говорити о популацији ученика који су у својој средини, у посматраном периоду, препознати као најбољи у математици. Ово је последица неорганизовања школских такмичења у школама, али и могућег субјективног односа учитеља према ученицима и њиховим склоностима ка математици (Leedy et al., 2003). Због тога тек окружно такмичење можемо сматрати нивоом такмичења на коме се више не поставља питање селекције ученика, а остварени резултати представљају праву рефлексију знања најбољих ученика у области математике.

Ако имамо у виду да на сваком од нивоа такмичења учествују ученици који, „осим што показују посебне склоности и интересовања да се математиком баве, постижу и најбољи успех у настави математике, како у погледу знања и вештина, тако и у погледу способности да та знања примене у решавању конкретних проблема, такмичење из математике може се посматрати и као индикатор ефикасности наставе математике” (Špijunović & Maričić, 2013: 133–134). Овакав вид провере знања значајан је јер се сагледавају постигнућа целокупне популације ученика, на основу јединствених критеријума, у приближно истим ситуацијама и на идентичним садржајима. Добијени резултати су корисни јер се на датој популацији сагледавају критичне тачке у раду са ученицима у настави математике у нижим разредима основне школе, што представља важан индикатор за прописивање мера за унапређивање образовног система у целини. Бројна су истраживања у којима је истакнута важност такмичења у образовном систему, као индикатора процене успешности математичког образовања, а по-

себно идентификације и процене ученика који показују надареност да се баве математиком (Bicknell & Riley, 2012; Geretschläger, 2017; Kontorovich & Koichu, 2016; Leder, 2011; de Losada & Taylor, 2022; Riley & Karnes, 2007; Taylor, 2017; Udvari & Schneider, 2000). Такмичења данас имају „важну улогу у образовном процесу и представљају саставни део образовног система” (Kenderov, 2022: 989).

Циљ овог рада јесте да се сагледају постигнућа ученика четвртог разреда на окружним такмичењима из математике на садржајима из области геометрије. Фокус разматрања је на ученицима четвртог разреда јер је то завршни разред првог циклуса обавезног образовања, а геометрија је одабрана с обзиром на то да бројна домаћа и страна истраживања показују да ученици на овим садржајима имају слабија постигнућа у односу на друге области математике (Gal & Linchevski, 2010; Ђокић и Поповић 2023; Milinković i sar., 2017; Sulistiowati et al., 2019). Посебно су слаби резултати на задацима из области геометрије мерења (Antić i Ђокић, 2019; Bragg & Outhred, 2001; Curry et al., 2006; Ђокић, 2013; Ђокић i Spasić, 2023; Jelić i Ђокић, 2017; Kamii & Kysh, 2006; Martin & Strutchens, 2000; Tan Sisman & Aksu, 2015; Zeljić i Ivančević, 2019). Овакви налази наводе на закључак да је настава геометрије, по својим ефектима, често мање успешна у односу на наставу других области математике (Ђокић i Zeljić, 2017). Поред тога, истраживања показују и да ученици на такмичењима из математике постижу слабије резултате на садржајима из области геометрије у односу на друге области (Facciaroni et al., 2023; Šrijunović & Maričić, 2013).

Важно полазиште за ово истраживање представљали су и резултати које су десетогодишњаци из Србије показали на међународном истраживању TIMSS (2011, 2015, 2019). Ти резултати су, у континуитету, кроз више циклуса, управо на геометријским задацима били лошији (Графикон 1).



Графикон 1. Постигнућа десетогодишњака у Србији, у домену математичке писмености, на истраживањима TIMSS 2011, 2015 и 2019 (Ђерић i sar., 2020: 51)

Резултати остварени на TIMSS тестирању у области *Мерење и геометрија* су у циклусу 2011. и 2015. „најслабији у односу на укупан просек остварен из математике у Србији” (Milinković i sar., 2017: 44). На тестирању које је реализовано 2019. године ученици из Србије су у области *Мерење и геометрија* остварили неколико поена мање у односу на циклус TIMSS 2015, али та разлика није статистички значајна (Ђерић i sar., 2020: 51). Значајно је истаћи и да, у односу на међународни просек, ученици из Србије постижу боље резултате, али у домену *Мерење и геометрија* и *Подаци* њихова постигнућа су лошија у односу на дати просек (Ђерић i sar., 2020).

Коначно, резултати из међународног истраживања PISA (OECD, 2019; OECD, 2023), у коме учествују петнаестогодишњаци из наше земље, указују на то да се тренд лошијих постигнућа у области геометрије наставља, што значи да систем можда није одреаговао на прави начин.

Како бисмо добили целовитију слику о постигнућима ученика четвртог разреда основне школе из геометрије на окружним такмичењима из математике, желели смо да испитамо и да ли економска развијеност окружења из кога ученици потичу и пол ученика утичу на њихова постигнућа. Бројна истраживања указују на повезаност економске развијености окружења из кога ученици долазе и њихових постигнућа у математици (Broer et al., 2019; Li et al., 2021; Mert Kalender, 2010; Özel et al., 2013). Ове разлике су уочљиве још на нивоу предшколског образовања (Duncan & Magnuson, 2005; Nores & Barnett, 2014) и како се ученици развијају, оне се увећавају (Johnson et al., 2022). Неједнаке образовне могућности ученика у срединама различите развијености утичу на постојеће разлике у њиховим постигнућима (Kang & Cogan, 2022), при чему се као неки од фактора наводе већа образовна подршка родитеља, квалификованији наставни кадар и могућност више додатног рада са ученицима из развијенијих средина. Поред тога, поменуто истраживање које су спровели Канг и Коган указује на то да ученици из развијенијих средина постижу боље резултате на TIMSS и PISA тестирању, као и да ученици из развијенијих средина показују већи напредак у апликативном знању чак и када су имали исти ниво усвојености основних математичких појмова као и ученици из мање развијених средина. Истраживања, која су реализована у свету, упућују на то да економска развијеност утиче и на развијеност раних геометријских вештина код деце (Uyanik Aktulun & Keser, 2021), и да се јавља као један од разлога каснијег слабијег успеха у овој области (Adah, 2021).

Утицај пола на постигнуће ченика из математике је тема која је доста разматрана у литератури, али је у много мањој мери испитиван утицај пола на постигнућа ученика на математичким такмичењима (Steeh et al., 2019). Када говоримо о разликама према полу у вези са општим математичким постигнућима ученика, резултати истраживања TIMSS 2019 указују на то да оне у Србији нису видљиве (Јошић i sar., 2020). Међутим, разлике према полу код ученика

који имају висока постигнућа у математици су изражене и код нас и у свету и на страни су дечака, посебно у врху дистрибуције (Bahar, 2021; Vulović et al, 2023; Wai et al., 2018). Због тога је значајно испитати и ову варијаблу у нашем истраживању и увидети да ли су и постигнућа из области геометрије на такмичарском нивоу у корелацији са општим математичким постигнућима ученика на такмичењима.

■ МЕТОД ИСТРАЖИВАЊА

Циљ овог истраживања представља анализа постигнућа ученика четвртог разреда из области геометрије на окружном такмичењу из математике.

Пажња је усмерена на следећа истраживачка питања (задатке):

- На којим геометријским садржајима ученици постижу најбоље резултате?
- Да ли се постигнућа ученика на такмичењу у области геометрије разликују у односу на пол и развијеност средине из које ученици потичу?

Популацију ученика чија постигнућа разматрамо чине сви ученици који су учествовали на окружном такмичењу из математике у периоду од 2015. до 2024. године, односно 18.491 ученик четвртог разреда основне школе. Структура популације ученика дата је у Табели 1.

Табела 1. Структура учесника на окружном такмичењу за ученике четвртог разреда основне школе према години када је такмичење организовано и према полу

година	укупно	девојчице		дечаци	
		број	%	број	%
2015.	2404	1102	45,84	1302	54,16
2016.	2494	1175	47,11	1319	52,89
2017.	1839	849	46,17	990	53,83
2018.	2246	991	44,12	1255	55,88
2019.	1843	790	42,86	1053	57,14
2020.	1993	856	42,95	1137	57,05
2021.	1225	483	39,43	742	60,57
2022.	1348	577	42,80	771	57,20
2023.	1668	662	39,69	1006	60,31
2024.	1431	569	39,76	862	60,24

Резултати Mann-Kendall тест хос теста упућују на то да у последњих десет година у четвртом разреду основне школе постоји позитиван тренд веће заступљености дечака на окружном такмичењу у односу на девојчице ($s=31$, $n=10$, $Z=2,683$). Овакав налаз није изненађујући имајући у виду да се исти трендови јављају на такмичењима у другим земљама, на пример у Америци (Bahar, 2021).

Окружно такмичење из математике организује се на нивоу 26 управних округа у Републици Србији, а број учесника у сваком округу дат је у Табели 2.

Табела 2. Број ученика четвртог разреда основне школе на окружним такмичењима из математике по окрузима

округ	година									
	2015.	2016.	2017.	2018.	2019.	2020.	2021.	2022.	2023.	2024.
борски	62	93	62	71	43	35	18	13	20	13
браничевски	56	71	26	78	21	73	30	42	52	24
град Београд	393	352	260	275	310	254	129	226	211	184
јабланички	106	101	101	105	59	61	53	55	57	54
јужнобачки	161	157	139	155	160	164	78	80	88	104
јужнобанат- ски	108	90	51	67	70	109	50	38	61	31
колубарски	88	79	67	79	56	49	44	42	48	43
косовско- метохијски	2	13	22	25	4	27	20	26	33	35
мачвански	140	133	98	87	97	99	92	98	117	77
моравички	105	105	88	91	77	92	49	48	83	87
нишавски	146	147	119	148	73	139	118	101	118	116
пчињски	47	48	50	56	51	46	36	50	60	33
пиротски	89	76	69	85	44	83	72	50	52	62
подунавски	63	81	37	95	54	50	23	32	30	39
поморавски	97	69	72	49	66	41	55	39	56	40
расински	84	121	83	102	123	118	83	80	88	108
рашки	103	142	0	109	67	89	42	41	92	61

севернобачки	82	50	51	47	37	44	28	37	39	34
северно-банатски	20	33	23	24	25	29	14	22	16	13
средњобанатски	53	85	49	44	38	43	18	19	64	23
сремски	60	75	82	86	63	54	32	28	24	17
шумадијски	123	147	100	101	138	126	47	74	138	109
топлички	30	24	39	34	18	39	16	15	11	18
зајечарски	54	59	56	68	55	50	40	30	42	38
западнобачки	41	65	36	65	44	40	16	22	21	24
златиборски	91	78	59	100	50	39	22	40	47	44

Како бисмо упоредили резултате ученика, посматрали смо регионе, округе и општине у којима се налазе школе које ученици похађају. На основу Уредбе из 2014. године (Uredba o utvrđivanju jedinstvene liste razvijenosti regiona i jedinica lokalne samouprave za 2014. godinu, 2014), подељени су региони и општине у Републици Србији у односу на вредност бруто домаћег производа (БДП) по глави становника у региону и општини. Региони у којима је БДП изнад вредности републичког просека припадају групи развијених региона, док су остали региони у групи недовољно развијених региона. На основу ове поделе развијени региони су Београдски регион и регион Војводине, док групи недовољно развијених региона припадају сви остали региони. Број учесника такмичења у односу на развијеност региона дат је у табели 3.

Табела 3. Број ученика четвртог разреда основне школе на окружним такмичењима у односу на развијеност региона

региони	година									
	2015.	2016.	2017.	2018.	2019.	2020.	2021.	2022.	2023.	2024.
развијени	918	907	691	763	747	737	365	472	524	430
недовољно развијени	1486	1587	1148	1483	1096	1256	860	876	1144	1001

На основу поменуте Уредбе, све општине у Републици Србији подељене су у пет група по степену развијености у односу на републички просек. Критеријум поделе општина и број учесника у односу на развијеност општина дати су у Табели 4 и 5.

Табела 4. Критеријуми разврставања јединица локалне самоуправе

ознака групе	I	II	III	IV	V
БДП у односу на републички просек	> 100%	80%-100%	60%-80%	50%-60%	< 50%
број општина	20	34	47	25	19

Табела 5. Број ученика четвртог разреда основне школе на окружним такмичењима у односу на развијеност општина

година	група				
	I	II	III	IV	V
2015.	2730	1282	1193	388	225
2016.	2997	1484	1253	433	317
2017.	2567	1205	1024	325	320
2018.	2631	1389	1096	352	349
2019.	2612	1278	1051	335	245
2020.	2740	1296	1004	407	334
2021.	2002	996	734	253	210
2022.	2326	1081	762	256	287
2023.	2311	1114	902	249	274
2024.	2644	1544	1081	309	325

У истраживању и анализи коришћени су подаци и резултати ученика четвртог разреда основне школе на окружном такмичењу из математике које су аутори прикупили у периоду од 2015. до 2024. године и обухватили су: пол ученика, име и место школе коју похађају, остварене резултате по сваком задатку и укупан број бодова. За сваког ученика старатељи су потписали одобрење за коришћење података и резултата ученика који су статистички обрађени.

У овом истраживању је вршена секундарна анализа постигнућа ученика четвртог разреда остварених на окружним такмичењима. Ученици су на такмичењима решавали пет задатака, међу којима су и типови задатака обухваћени овом анализом, а које је састављала Државна комисија за такмичење ученика основних школа из математике. Сваки задатак бодован је са максимално 20 бодова, према јединственом кључу у оквиру кога је сваки корак у решавању бодован са одговарајућим бројем бодова.

Добијени подаци обрађени су у софтверском пакету за статистичку обраду података SPSS 24 и Microsoft Excel-у. Статистичке мере и поступци коришћени у обради података су: проценти, фреквенције, аритметичка средина, статистички тестови за одређивање нормалности расподеле нумеричких података, Mann-Whitney тест, Kruskal-Wallis тест, Dunn post-hoc тест и Mann-Kendall тест за одређивање постојања тренда у одређеном временском интервалу који је непараметријски и не захтева претпоставку о постојању било какве функције расподеле података. Израчунавања у вези са Mann-Kendall тестом, одређивање тренда и тестирања значајности, рађени су у пакету Microsoft Excel-у применом функција које су аутори, на основу одговарајућих формула, самостално урадили.

РЕЗУЛТАТИ И ДИСКУСИЈА

Услед разлике међу генерацијама ученика које су учествовале на такмичењима, као и различите тежине задатака, остварени резултати ученика према годинама нису у потпуности упоредиви, али можемо урадити садржинску анализу геометријских задатака и указати на садржаје на којима су ученици имали најбоље резултате.

Анализа садржаја задатака на такмичењу показује да на сваком такмичењу у периоду од 2015. до 2024. године од пет задатака један припада области геометрије и то геометрије мерења. Захтев у свим задацима везан је за одређивање површине квадрата, правоугаоника или коцке. Током десетогодишњег периода на такмичењима су били доминантнији задаци дати у математичком контексту, док су само током четири године били дати задаци у реалном контексту, односно садржали су захтев да се реши проблем који је контекстуално заснован (Табела 6). Последњих пет година сви задаци били су задати исључиво у математичком контексту.

Табела 6. Просечан број поена по ученику на задацима из геометрије мерења

Година	2015.	2016.	2017.	2018.	2019.	2020.	2021.	2022.	2023.	2024.
Кон- текст задатка*	Р	Р	Р	М	Р	М	М	М	М	М
Просе- чан број поена	10,61	9,40	2,65	3,23	5,56	6,70	8,42	12,50	16,26	13,09

Напомена.* Р – реални контекст М – математички контекст

Резултати представљени у Табели 6 упућују на то да су најслабији резултат из геометрије постигли ученици на окружним такмичењима у периоду од 2017. до 2020. године. Контекст у коме је задат математички задатак нема битну улогу у успешности ученика.

С обзиром на то да је сваки задатак вреднован по јединственом кључу у оквиру кога је предвиђено бодовање за сваки корак у решавању, то нам је омогућило да за сваког ученика, на основу броја остварених бодова, утврдимо до ког корака у решавању задатка је дошао и да на основу тога урадимо садржинску анализу.

Анализа садржаја задатака на којима су ученици постигли најслабији резултат показује да су најмање успешни били на задацима у којима је потребно разумевање појма обима фигуре и израчунавање дужине странице правоугаоника или квадрата код фигура које настају спајањем две фигуре или више фигура облика правоугаоника или квадрата. Више од три четвртине ученика четвртог разреда основне школе на такмичењу из 2017. године (78,85%) није остварило ниједан поен на овом задатку, док је само 9,46 % њих успешно решило овај задатак. И наредна генерација ученика четвртог разреда имала је сличан захтев везан за обим фигуре и слична постигнућа, будући да 79,39% ученика није остварило ниједан поен, док је 13,27% њих успешно решило овај задатак. Разлог за оваква постигнућа треба тражити у разумевању појма обима приликом његовог формирања у настави математике. „Добро разумевање појма обима укључује резонување засновано на односима између страница дате фигуре, јер ученици који не разумеју довољно добро појам обима имају потешкоће да закључе у каквом су односу странице дате фигуре” (Milikić i sar., 2022: 132). На ову чињеницу указују и друга истраживања у којима се износи закључак да ученици усвоје процедуре и обрасце, али не разумеју значење појма (Moyer, 2001; Outhred & Mitchelmore, 2000; Tan Sisman & Aksu, 2015; Vighi & Marchini, 2011; Zacharos, 2006).

Поред проблема разумевања појма обим фигуре, ученици су лош резултат остварили на окружном такмичењу 2019. године ($M=5,56$) на задатку разумевања појма површине фигуре, односно идеја поплочавања. Идеја поплочавања, односно дељење површи на јединичне мере површи је основни појам који води ка разумевању појма *површина фигуре* (Battista, 2007). Уколико ученици не разумеју ову идеју, појам површине усвајају као процедуру множења величина. Бројни аутори управо и скрећу пажњу на ниска постигнућа ученика на задацима мерења површине (Jelić i Đokić, 2017; Lin & Tsai, 2003; Outhred & Mitchelmore, 2000; Tan Sisman & Aksu, 2015; Zeljić i Ivančević, 2019). Разлози за ниска постигнућа проналазе се у доминацији алгоритамског приступа увођењу појма *површина*, који „карактерише доминантно наглашавање процедуралних вештина и примена формула” (Zeljić i Ivančević, 2019: 64). И у истраживању TIMSS које је обављено 2015. године ученици су били испод просека реша-

вајући управо задатке у којима су као захтев имали да израчунају површину правоугаоника и квадрата, када су у подобласти дводимензионални и тродимензионални облици остварили најслабији резултат од 40,9% тачно решених задатака (Milinković et al., 2017: 39).

Најбоље резултате у области геометрије на такмичењима ученици четвртог разреда основне школе постигли су од 2022. године ($M=12,50$) када је 55,20% ученика успешно решило задатак у којем је дат захтев да ученици на основу слике сложене фигуре одреде дужине страница правоугаоника и израчунају површину. Сличан захтев постављен је на такмичењу 2023. године када су ученици били још успешнији у решавању ($M=16,26$) будући да је 70,44% ученика решило овај задатак. Оба задатка су била представљена сликом, што упућује на закључак да слика, као визуелна допуна задатку, доприноси бољој успешности решавања задатка. Последње, 2024. године ученици су остварили, такође задовољавајући резултат на задатку из геометрије ($M=13,09$), јер је 55,49% ученика успешно решило овај задатак. За решавање задатка било је неопходно само извршити процедуре у поступку решавања. Добијени резултати остварени последњих година и побољшање постигнућа ученика у области геометрије геометрије показују да ученици на такмичењима остварују боља постигнућа када је у питању процедурално знање, у односу на концептуално.

Боље резултате на такмичењу из математике последњих година можемо посматрати као последицу иновирања програма наставе и учења којим је уведено да у области обима и површине фигура ученици изучавају годину раније, у односу на пређашњи програм. У другом разреду се уводи појам обима фигуре, без увођења формуле, што је у функцији концептуалног разумевања појма обима, а тек се у трећем разреду уводи формула за израчунавање. Исто је и са мерењем површине. Наиме, у трећем разреду датим програмом је предвиђено изучавање идеје где се у трећем разреду ученици упознају са идејом поплочавања површи и разумевање појма *површина фигуре*, а у четвртог разреду се уводе обрасци. Овакав програм води ка дубљем разумевању појма *обим и површина фигуре*, а не само ка усвајању процедура и образаца за израчунавање.

Једна од интенција овог истраживања била је и да испитамо да ли постоји разлика у постигнућима у области геометрије између дечака и девојчица. Постигнућа ученика у односу на пол приказана су у Табели 7.

Табела 7. Просечан број поена из геометрије ученика четвртог разреда на окружном такмичењу из математике у односу на пол у области геометрије мерења

година	просек (М)	девојчице	дечази	Mann-Whitney тест
2015.	10,61	10,37	10,80	нема статистички значајне разлике
2016.	9,40	9,09	9,67	нема статистички значајне разлике
2017.	2,65	2,36	2,90	$U = 396504,5$, $Z = -2,933$, $p = 0,003$
2018.	3,23	2,83	3,55	$U = 600186,5$, $Z = -2,013$, $p = 0,044$
2019.	5,56	5,91	7,56	$U = 372257,5$, $Z = -4,095$, $p < 0,001$
2020.	6,70	6,78	7,49	$U = 427520,0$, $Z = -5,142$, $p < 0,001$
2021.	8,42	8,55	8,33	нема статистички значајне разлике
2022.	12,50	12,63	12,40	нема статистички значајне разлике
2023.	16,26	16,64	16,01	нема статистички значајне разлике
2024.	13,09	12,93	13,20	нема статистички значајне разлике

Добијени резултати показују да су у периоду од 2015. до 2020. године и 2024. године дечази имали боље просечне резултате од девојчица, док су у период од 2017. до 2020. године разлике у постигнућима биле статистички значајне. Период када је постојала статистички значајна разлика је управо период када су ученици постигли најслабије резултате у области геометрије. Иако у последње четири године ове разлике више нису статистички значајне, напомињемо да су први пут девојчице у период од 2021. до 2023. године имале бољи просечни резултат од дечака. Престанак периода постојања статистички значајних разлика и већег броја бодова код девојчица поклапа се са почетком пандемије у нашој земљи, што може бити један од разлога. Међутим, разлог може бити и што се овај тренутак поклапа и са периодом када на такмичење долазе ученици који су од првог разреда садржаје проучавали према новом програму наставе и учења. Због тога претпоставку о разлозима престанка ових разлика могу дати нека будућа истраживања. Добијене резултате можемо упоредити са истраживањем у којем је испитивано да ли постоје статистички значајне разлике у постигнућима између дечака и девојчица на окружном такмичењу (Vulović et al., 2023). Налази указују на то да постигнућа ученика у односу на пол на геометријским задацима нису у директној сразмери са њиховим укупним постигнућима на окружним такмичењима. Упоређујући добијене резултате са резултатима које су добили Вуловић и сарадници (Vulović et al., 2023), може се уочити да иако су дечази сваке године имали боља укупна постигнућа од девојчица (2024. године просечан укупан број поена дечака био је 59,32, а девојчица 52,71 и постојала је

статистички значајна разлика у постигнућима ($U=208374$, $Z= -4,822$, $p<0.001$), од 2021. до 2023. године девојчице су имале боље постигнуће на геометријским задацима. Такође, у годинама када је постојала статистички значајна разлика у укупним постигнућима ученика у односу на пол (2016, 2021. и 2024.) та разлика није била статистички значајна када су посматрани геометријски задаци. Структуру ученика на врху дистрибуције не можемо посматрати у 5% најбољих ученика, јер у посматраном периоду много више од 5% ученика је остварило максималних 20 бодова на геометријском задатку. Ако наше разматрање ограничимо на ученике који имају максималан број бодова, можемо констатовати да је број дечака у 9 од 10 година био већи од броја девојчица али да се не може уочити тренд раста или смањења њиовог броја. Једина година када је број девојчица био већи је 2021. година (52,50% девојчица), а након тога њихов број опада (43,46%, 41,02% и 39,29% од 2022. до 2024. године).

Имајући у виду добијене резултате, можемо закључити да садржаји из геометрије нису они који праве главне разлике код најбољих ученика у математичким постигнућима.

Уколико постигнућа ученика *на задацима из геометрије мерења* посматрамо у односу на економску развијеност региона из којих су ученици, увиђамо да ученици из развијених региона имају, у просеку, за 20,17% боље резултате од ученика из недовољно развијених региона (Табела 8). Подаци показују да код 7 од 10 посматраних година постоји статистички значајна разлика у постигнућима ученика у односу на развијеност региона. Интересантно је да је разлика у постигнућима ученика најмања 2021. године када су сви ученици у Републици Србији имали онлајн или комбиновану наставу.

Табела 8. Просечан број поена ученика четвртог разреда на задацима из геометрије мерења у односу на развијеност региона

година	региони		Mann-Whitney тест
	развијени	недовољно развијени	
2015.	10,89	10,43	нема статистички значајне разлике
2016.	10,12	8,99	$U = 666733,5$, $Z = -3,219$, $p = 0,001$
2017.	2,84	2,54	нема статистички значајне разлике
2018.	4,07	2,80	$U = 531088,5$, $Z = -3,378$, $p = 0,001$
2019.	6,60	4,85	$U = 354015,5$, $Z = -5,214$, $p < 0,001$
2020.	7,75	6,08	$U = 420274$, $Z = -3,796$, $p < 0,001$
2021.	8,47	8,40	нема статистички значајне разлике

2022.	13,90	11,74	$U = 172173, Z = -3,989, p < 0,001$
2023.	18,05	15,44	$U = 250811, Z = -6,650, p < 0,001$
2024.	15,45	12,08	$U = 171924, Z = -6,687, p < 0,001$

Како бисмо упоредили успех ученика по окрузима на задацима из геометрије мерења, у десетогодишњем периоду, направил смо у оквиру сваке такмичарске године ранг-листу округа у зависности од постигнућа ученика. Сваком округу доделили смо индексне поене у распону од 1 до 26, при чему смо округу који има најмањи просечан број поена ученика доделили 1 индексни поен, а округу чији је просечан број поена ученика највећи доделили смо 26 индексних поена. Индекси поена, сабрани на описани начин, приказани су у Табели 9.

Табела 9. Ранг-листа округа у односу на успешност ученика на задацима из геометрије мерења

округ	укупан број индексних поена
град Београд	245
златиборски	228
нишавски	198
јужнобачки	191
пиротски	167
поморавски	161
сремски	158
моравички	151
севернобачки	149
подунавски	143
мачвански	138
браничевски	136
јужнобанатски	135
севернобанатски	134
рашки	133
пчињски	127
шумадијски	123
средњобанатски	118
расински	112
западнобачки	111
колубарски	111

јабланички	99
борски	87
зајечарски	75
топлички	50
косовско-метохијски	29

На основу добијених података можемо закључити да најбољи успех на такмичењу на геометријским задацима постижу ученици у окрузима у којима су велики градови у Србији, преко 190 индексних поена, док најслабији резултат остварују ученици из округа источне и јужне Србије, мање од 100 индексних поена.

Највећа разлика у постигнућима ученика постоји ако посматрамо постигнућа ученика у односу на развијеност општина у којима се налази школа коју похађају. Резултати показују да је у посматраном периоду сваке године постојала статистички значајна разлика у њиовим постигнућима *на задацима из геометрије мерења* (Табела 10).

Табела 10. Просечан број поена у односу на развијеност општина на задацима из геометрије мерења

година	просек	просек по развијености општина					Kruskal-Wallis тест
		I	II	III	IV	V	
2015	10,61	11,41	10,64	9,71	8,98	9,66	H(4) = 23,024, p < 0,001
2016	9,40	10,66	9,41	8,29	6,74	7,67	H(4) = 50,655, p < 0,001
2017	2,65	3,57	2,41	1,68	1,86	1,09	H(4) = 24,735, p < 0,001
2018	3,23	4,52	2,76	1,85	2,52	2,04	H(4) = 52,170, p < 0,001
2019	5,56	6,82	5,17	4,06	3,52	4,00	H(4) = 54,410, p < 0,001
2020	6,70	7,61	6,12	6,39	5,85	4,65	H(4) = 17,812, p = 0,001
2021	8,42	9,18	8,45	7,89	7,95	5,81	H(4) = 47,504, p < 0,001
2022	12,50	14,06	12,59	11,37	9,22	7,78	H(4) = 54,619, p < 0,001
2023	16,26	17,55	16,51	15,23	15,06	11,34	H(4) = 70,474, p < 0,001
2024	13,09	14,55	12,73	12,31	10,49	8,96	H(4) = 46,271, p < 0,001

Резултати Dunn-ov post-hoc теста упућују на то да су разлике посебно изражене код ученика I групе општина у односу на остале групе, док су разлике код општина које припадају III, IV и V групи минималне. Тренд резултата ученика

у десетогодишњем периоду, у односу на развијеност општина из које долазе, показује стабилност. У Табели 11 приказано је за колико се процената, у просеку, разликује постигнуће ученика по развијености општина у односу на просечно постигнуће на нивоу Републике.

Табела 11. Разлика у постигнућима ученика четвртог разреда одговарајуће групе општина у односу на републички просек на задацима из геометрије мерења

I	II	III	IV	V
+17,24%	-3,90%	-15,89%	-20,39%	-31,23%

Добијени резултати показују да боља постигнућа постижу ученици који долазе из развијенијих средина. Добијени резултат може бити последица чињенице да је у развијенијим срединама већа популација ученика и прави се јача селекција ученика који ће учествовати на окружном такмичењу, што није случај у срединама у којима мањи број ученика учествује на сваком претходном нивоу такмичења.

■ ЗАКЉУЧАК

У овом раду дата је једна свеобухватна квантитавна и квалитативна анализа успешности и постигнућа ученика четвртог разреда основних школа у Србији, приликом решавања геометријских задатака на окружним такмичењима из математике. Разматран је временски опсег од 2015. до 2024. године, а укупан узорак обухватао је 18.491 ученика. Узорак је, дакле, био репрезентативан и релевантан за доношење закључака.

Садржинска анализа задатака показала је да на окружном такмичењу из математике за ученике четвртог разреда основне школе сви задаци из геометрије припадају области геометрије мерења. Међу задацима доминирају задаци дати у математичком контексту. Анализа је показала да су ученици најуспешнији у решавању задатака у којима треба да примене јасне процедуре у процесу решавања, али да су мање успешни када треба да уоче односе између елемената, да испоље концептуална знања и покажу дубље разумевање, а не само примену обрасца. Добијени резултати могу бити и последица чињенице, на коју указују поједини истраживачи, да су у уџбеницима математике задаци у области мерења величина високо процедурално засновани и „да се мало пажње посвећује концептуалном разумевању мерења величина, што може да ограничи поступке мерења” (Ђокић и Spasić, 2023: 97). Исте ставове износе и Милинковић и Шева када анализирају типологију грешака ученика у садржајима геометрије у ис-

траживању TIMSS: „Основу успеха у решавању задатака из геометрије не чини познавање формула, већ концептуално разумевање, сагледавање услова који произлазе из реалног контекста задатка и способности давања образложења. Уопштено говорећи, ученицима из наше земље недостаје флексибилност до које се стиже кроз искуство у решавању различито формулисаних задатака са разнородним примерима геометријских облика, уз често мењање стратегија решавања” (Milinković & Ševa, 2021: 188).

Резултати су показали да између дечака и девојчица током само појединих година постоје статистички значајне разлике у корист дечака и да су оне присутне искључиво тада када су и једни и други остварили најлсобије резултате. Међутим, добијени подаци не могу бити сигуран ослонац за доношење закљачака о успешности у корист дечака или девојчица, јер нису константни.

Анализа показује да постоје разлике у постигнућима ученика у односу на економску развијеност окружења у коме се налазе школе које похађају. Ученици из развијенијих региона и најразвијенијих јединица локалне самоуправе постижу најбоље резултате на такмичењима, док су код ученика из мање развијених окружења разлике у постигнућима минималне.






Подаци добијени у презентованом истраживању пружају јаснију слику о постигнућима ученика из геометрије. Штавише, високо корелирају са резултатима других истраживачких студија и тестирања TIMSS који указују на исте потешкоће које имају ученици приликом решавања задатака из геометрије. Налази посебно добијају на значају ако се има у виду да су ово резултати које су постигли ученици који у Србији постижу најбољи успех из математике. Добијени резултати треба да представљају полазну основу за свеобухватна истраживања у домену учења геометрије у нижим разредима основне школе, као и приликом анализирања постигнућа ученика у овој области у оквиру редовне наставе математике, што би требало да резултира јаснијим импликацијама за наставну праксу. Опажамо да је реформа програма наставе и учења из математике за ниже разреде основне школе, према резултатима које смо добили, утицала на побољшање постигнућа ученика и очекујемо да ће се такав тренд задржати и проширити на све области математике.

■ КОРИШЋЕНА ЛИТЕРАТУРА

- Adah, G. O. (2021). *Students' Sex, Location and Teachers' Educational Qualification as Determinants of Students' Achievement in Mathematics* [Unpublished M.Ed. dissertation]. Delta State University, Abraka, Nigerian.
- Antić, M. D., & Đokić, O. J. (2019). The Development of the Components of the Length Measurement Concept in the Procedure of Measurement Using a Ruler. *Research in Mathematical Education*, 22(4), 261–282. DOI:10.7468/JKSMED.2019.22.4.261
- Battista, M. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In Lester, F. (ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching & learning* (pp. 843–908). National Council of Teachers of Mathematics.
- Bahar, A. K. (2021). Trends in gender disparities among high-achieving students in mathematics: an analysis of the American Mathematics Competition (AMC). *Gifted Child Quarterly*, 65(2), 167–184. DOI:10.1177/0016986220960453
- Bicknell, B., & Riley, T. (2012). The role of competitions in a mathematics programme. *APEX: The New Zealand Journal of Gifted Education*, 17(1), 1–9.
- Bragg, P., & Outhred, L. (2001). Students' knowledge of length units: Do they know more than rules about rulers? In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Annual Conference of the PME* (Vol. 1, pp. 377–384). Program Committee.
- Broer, M., Bai, I. & Fonseca, F. (2019). *Socioeconomic Inequality and Educational Outcomes. Evidence from Twenty Years of TIMSS*. Springer Open
- Curry, M., Mitchelmore, M. C. & Outhred, L. (2006). Development of children's understanding of length, area and volume measurement principles. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th annual conference of the PME* (Vol. 2, pp. 377–384). Program Committee.
- Gal, H., & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: Analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, 74(2), 163–183. DOI:10.1007/s10649-010-9232-y
- Geretschläger, R. (2017). The rainbow of mathematics—Teaching the complete spectrum and the role mathematics competitions can play. In Soifer, A. (Ed.), *Competitions for young mathematicians. Perspectives from five continents* (pp. 145–170). Springer.
- De Losada, M. F., & Taylor, P. J. (2022). Perspectives on mathematics competitions and their relationship with mathematics education. *ZDM Mathematics Education* 54, 941–959, DOI:10.1007/s11858-022-01404-z
- Duncan, G. J., & Magnuson, K. A. (2005). Can family socioeconomic resources account for racial and ethnic test score gaps? *The Future of Children*, 15, 35–54. DOI: 10.1353/foc.2005.0004
- Đerić, I., Gutvajn, N., Jošić, S. i Ševa, N. (ur.) (2020). Nacionalni izveštaj: *TIMSS 2019 u Srbiji – pregled osnovnih nalaza*. Institut za pedagoška istraživanja.
- Đokić, O. i Zeljić, M. (2017). Teorije razvoja geometrijskog mišljenja prema Van Hilu, Fišbajnu i Udemon-Kuzniaku. *Teme*, 41(3), 623–637.
- Đokić, O. i Popović, P. (2023). Interakcije između različitih vrsta matematičkog znanja u udžbenicima matematike za zapreminu tela. *Inovacije u Nastavi*, 36(2), 72–91. DOI: 10.5937/inovacije2302072D
- Đokić, O. i Spasić, K. (2023). Različite vrste znanja o merenju dužine u udžbenicima matematike za prvi ciklus osnovnog obrazovanja. *Zbornik radova Pedagoškog fakulteta u Užicu*, 25, 97–128. DOI:10.5937/ZRPFU2325095D

- 📖 Facciaroni, L., Gambini, A., & Mazza, L. (2023). The difficulties in geometry: A quantitative analysis based on results of mathematics competitions in Italy. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 11(2), 259–270.
- 📖 Jelić, M., i Đokić, O. (2017). Ka koherentnoj strukturi udžbenika matematike – analiza udžbenika prema strukturnim blokovima TIMSS istraživanja. *Inovacije u nastavi*, 30 (1), 67–81. DOI: 10.5937/inovacije1701067J
- 📖 Johnson, T., Burgoyne, A., Mix, K., Young, C., & Levine, S. (2022). Spatial and mathematics skills: Similarities and differences related to age, SES, and gender. *Cognition*, 218. DOI:10.1016/j.cognition.2021.104918
- 📖 Jošić, S., Teodorović, J. i Jakšić, I. (2021). Faktori postignuća učenika iz matematike i prirodnih nauka: TIMSS 2019 u Srbiji. U I. Đerić, N. Gutvaj, S. Jošić i N. Ševa (ur.), *TIMSS 2019 u Srbiji* (str. 43–63). Institut za pedagoška istraživanja.
- 📖 Kamii, C. & Kysh, J. (2006). The difficulty of „length×width”: Is a square the unit of measurement?. *The Journal of Mathematical Behavior*, 25(2), 105–115.
- 📖 Kang, H. & Cogan, L. (2022). The Differential Role of Socioeconomic Status in the Relationship between Curriculum-Based Mathematics and Mathematics Literacy: the Link Between TIMSS and PISA. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20, 133–148.
- 📖 Kenderov, P. (2022). Mathematics competitions: an integral part of the educational process. *ZDM – Mathematics Education*, 54(5), 983–996. DOI:10.1007/s11858-022-01348-4
- 📖 Kontorovich, I., & Koichu, B. (2016). A case study of an expert problem poser for mathematics competitions. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14, 81–99.
- 📖 Leder, G. (2011). Mathematics taught me Einstein's old cocktail of inspiration and perspiration: Mathematically talented teenagers as adults. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 11(1), 29–38.
- 📖 Leedy, M. G., LaLonde, D., & Runk, K. (2003). Gender equity in mathematics: beliefs of students, parents, and teachers. *School science and Mathematics*, 103(6), 285–292.
- 📖 Li, H., Liu, J., Zhang, D., & Liu, H (2021). Examining the relationships between cognitive activation, self-efficacy, socioeconomic status, and achievement in mathematics: A multi-level analysis. *British Journal of Educational Psychology*, 91(1), 101-126.
- 📖 Lin, P. J., & Tsai, W. H. (2003). Fourth graders' achievement of mathematics in TIMSS 2003 field test (in Chinese). *Science Education Monthly*, 258, 2–20.
- 📖 Martin, G. W., & Strutchens, M. E. (2000). Geometry and measurement. In E. A. Silver & P. A. Kenney (Eds.), *Results from the seventh mathematics assessment of the national assessment of educational progress* (pp. 193–234). National Council of Teachers of Mathematics.
- 📖 Mert Kalender, Ö. (2010). The roles of affective, socioeconomic status and school factors on mathematics achievement: a structural equation modeling study, [Doctoral dissertation]. Graduate School of Natural and Applied Sciences Middle East Technical University
- 📖 Milikić, M., Maričić, S., & Vulović, N. (2022). Primena softvera *GeoGebra* pri formiranju pojma obima figure u mladim razredima osnovne škole [Application of the GeoGebra software in the formation of the concept of the volume of a figure in the lower grades of elementary school], *Zbornik radova pedagoškog fakulteta u Užicu*, 25(24), 127–140.
- 📖 Milinković, J., Marušić Jablanović, M. i Dabić Boričić, M. (2017). Postignuće učenika iz matematike: glavni nalazi, trendovi i nastavni program [Student Achievement in Mathematics: Key Findings, Trends, and the Curriculum]. U M. Marušić Jablanović, N. Gutvaj i I. Jakšić (ur.), *TIMSS 2015 u Srbiji* (str. 27–50). Institut za pedagoška istraživanja.

- 📖 Milinković, J. i Ševa, N. (2021). Tipologija grešaka u rešavanju zadataka iz geometrije [Typology of errors in solving problems in geometry]. U Đerić, I., Gutvajn, N., Jošić, S. & Ševa, N. (ur) *TIMSS 2019 u Srbiji: rezultati međunarodnog istraživanja postignuća učenika četvrtog razreda osnovne škole iz matematike i prirodnih nauka*, (str. 163–192). Institut za pedagoška istraživanja.
- 📖 Mičić, V., Kadelburg, Z. i Popović, B. (2008). 60 godina Društva matematičara Srbije [60 years of the Society of Mathematicians of Serbia], *Nastava matematike*, 53(1–2), 1–12. Društvo matematičara Srbije.
- 📖 Moyer, S. P. (2001). Using representations to explore perimeter and area. *Teaching Children Mathematics*, 8(1), 52–59.
- 📖 Nores, M., & Barnett, W. S. (2014). *Access to high quality early care and education: Readiness and opportunity gaps in America, CEELo & NIEER Policy Report*. Center on Enhancing Early Learning Outcomes.
- 📖 OECD (2019). *PISA 2018 Results (Volume I): What Students Know and Can Do*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/5f07c754-en>.
- 📖 OECD (2023). *PISA 2022 Results (Volume I): The State of Learning and Equity in Education*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/53f23881-en>.
- 📖 Outhred, L., & Mitchelmore, M. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(2), 144–167.
- 📖 Özel, Z. E. Y., Özel, S., & Thompson, B. (2013). SES-Related Mathematics Achievement Gap in Turkey Compared to European Union Countries. *Education & Science/Eğitim ve Bilim*, 38(170), 179–193.
- 📖 Riley, T. L., & Karnes, F. (2007). Competitions for gifted and talented students: Issues of excellence and equity. In J. Van Tassel-Baska (Ed), *Serving gifted learners beyond the traditional classroom* (pp. 145–168). TX Prufrock Press.
- 📖 Steegh, A. M., Höffler, T. N., Keller, M. M., & Parchmann, I. (2019). Gender differences in mathematics and science competitions: A systematic review. *Journal of Research in Science Teaching*, 56(10), 1431–1460.
- 📖 Sulistiowati, D. L., Herman, T., & Jupri, A. (2019). Student difficulties in solving geometry problem based on van Hiele thinking level. *Journal of Physics: Conference Series*, 1157(4): 042118, 1–7. DOI:10.1088/17426596/1157/4/042118
- 📖 Špijunović, K., & Maričić, S. (2013). Pupils' Performance in the District Mathematics Competition as the Indicator of Efficiency of Primary Mathematics Education. In H. Butenko & B. Kozuh (Eds.), *Contemporary School and Education* (133–146), Ministry of Education and Science, Youth and Sport of Ukraine, Horlivka Institute for Foreign Languages of the State Higher Educational Establishment „Donbas State Pedagogical University” A.F.M. Krakow University, Faculty of Education University of Primorska.
- 📖 Tan Sisman, G., & Aksu, M. (2015). A Study on Sixth Grade Students' Misconceptions and Errors in Spatial Measurement: Length, Area, and Volume. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(7), 1293–1319. DOI:10.1007/s10763-015-9642-5
- 📖 Taylor, P. J. (2017). Future directions for research in mathematics competitions. In Soifer, A. (Ed.), *Competitions for young mathematicians. Perspectives from five continents* (pp. 303–328). Springer.
- 📖 Udvari, S. J., & Schneider, B. H. (2000). Competition and the adjustment of gifted children: A matter of motivation. *Roepers Review*, 22(4), 212–216. DOI:10.1080/02783190009554040
- 📖 Uredba o utvrđivanju jedinstvene liste razvijenosti regiona i jedinica lokalne samouprave za 2014. godinu (2014). *Sl. Glasnik RS*, br. 104/2014.
- 📖 Uyanik Aktulun, O., & Keser, M. (2021). Socio-economic status and attention ability as predictors of early geometry skills of 60-72-month-old children. *International Journal on Social and Education Sciences (JonSES)*, 3(3), 603–617. DOI:10.46328/ijonses.196

-  Vighi, P., & Marchini, C. (2011). A gap between learning and teaching geometry. *Paper presented at the CERME 7 Conference*. Rzeszow, Poland.
-  Vulović, N., Mihajlović, A. i Milinković J. (2023). Gender differences at mathematics competitions in the Republic of Serbia. *Inovacije u nastavi*, 13 (3), 119–135. DOI:10.5937/inovacije2303119V
-  Wai, J., Hodges, J., & Makel, M. C. (2018). Sex differences in ability tilt in the right tail of cognitive abilities: a 35-year examination. *Intelligence*, 67, 76–83.
-  Zacharos, K. (2006). Prevailing educational practices for area measurement and students' failure in measuring areas. *The Journal of Mathematical Behavior*, 25(3), 224–239.
-  Zeljić, M. Ž. i Ivančević, M. R. (2019). Algoritamski i konceptualni pristup merenju površine figura [Algorithmic and conceptual approach to figure area measurement]. *Inovacije u nastavi*, 32(1), 64–74. DOI: 10.5937/inovacije1901064Z

Примљено 10.09.2024; прихваћено за штампу 20.11.2024.